Correction Baccalauréat 2009 série A

Exercice 1. (5pts)

I-

1- Résolvons le système suivant

$$\begin{cases} L_1 & : & 2x & + & y & = & 1 \\ L_2 & : & 5x & + & 3y & = & 4 \end{cases}$$

En miltipliant la ligne L_1 par -3 on obtient le système ci-dessous :

$$\begin{cases} -3\times & L_1 & : & (-3\times 2x) & + & (-3\times y) & = & -3\times 1 \\ & L_2 & : & 5x & + & 3y & = & 4 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} -3\times & L_1 & : & -6x & - & 3y & = & -3 \\ & L_2 & : & 5x & + & 3y & = & 4 \end{cases}$$

En faisant $-3\times L_1 + L_2$ C'est à dire en additionnant les lignes du système précédent on obtient

$$\begin{array}{rcrcl} & & -6x+5x-3y+3y & = & -3+4 \\ \iff & & -x & = & 1 \\ \iff & & x & = & -1 \end{array}$$

Si on remplace par exemple la valeur de x dans la ligne L_2 on obtient :

$$\begin{array}{rlcl} & 5\times -1+3y & = & 4 \\ \iff & -5+3y & = & 4 \\ \iff & 3y & = & 9 \\ \iff & y & = & 3 \end{array}$$

La solution de ce système d'équation est donc

$$S=\{(-1;3)\}$$

2- Déduisons l'ensemble solution du système suivant :

$$\begin{cases} L_1 & : & 2\ln(x) & + & \ln(y) & = & 1 \\ L_2 & : & 5\ln(x) & + & 3\ln(y) & = & 4 \end{cases}$$

Pour que les solutions d'un tel système existe il faut au moins que $x>0$ et $y>0$. Posons $X=\ln(x)$ et $Y=\ln(y)$ on obtient alors le système

$$\begin{cases} L_1 & : & 2X & + & Y & = & 1 \\ L_2 & : & 5X & + & 3Y & = & 4 \end{cases}$$

D'après la question on aura donc $X=-1$ et $Y=3$ ainsi

$$\begin{array}{rrcl} & X & = & -1 \\ \iff & \ln(x) & = & -1 \\ \iff & x & = & e^{-1} \end{array}$$

de même

$$\begin{array}{rrcl} & Y & = & 3 \\ \iff & \ln(y) & = & 3 \\ \iff & y & = & e^{3} \end{array}$$

La solution de ce système d'équation est donc

$$S=\left\{\left(e^{-1};e^{3}\right)\right\}$$

II-

(a) La réponse est (b)

Justifications :

- La fonction de la propositions (a) n'est pas définie sur $]2;+\infty[$
- En dérivant la fonction de question (c) on aura au numérateur de la dérivée la valeur $\dfrac{1}{3}$ et non 3
- En dérivant la fonction de la question (d) on trouve -3 au dénominateur et non 3.

(b) La réponse est (a)

Justifications : Il suffit d'appliquer la propriété de la dérivée du produit de deux fonction u et v. On sait que $(uv)' = u'v + v'u$. La réponse devrait a priori être une somme de deux facteurs. ce qui nous permet d'éliminer (b) et (c). La dérive de la fonction e^{2x} est $2e^{2x}$ et non $2e^{x}$, ce qui nous permet d'éliminer la réponse (a).

(c) La réponse est (c)

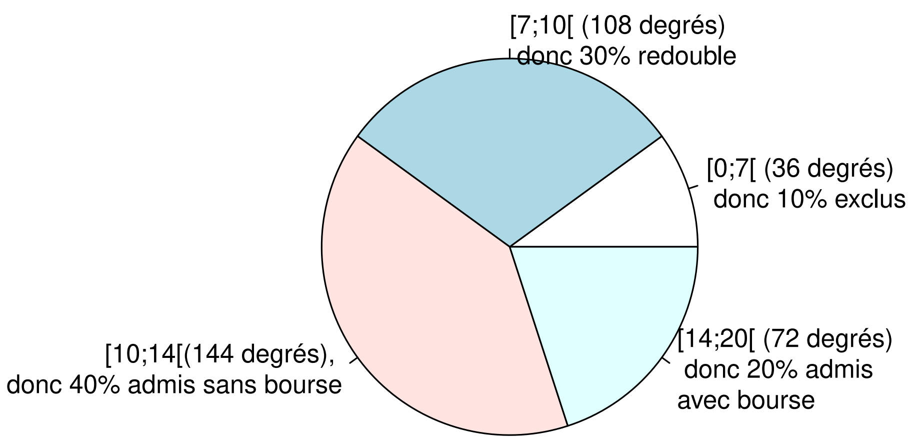
Justifications : la fonction $\dfrac{1}{x}$est décroissante soit sur $]-\infty; 0[$ soit sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$. Cela permet d éliminer les propositions (a) et (b) ainsi que (d). Il ne reste que la (c)

Exercice 2. (5pts)

1. Pour représenter le diagramme circulaire nous allons déterminer la mesure du secteur angulaire. Rappellons que l'effectif total de cette série est 60. Pour chaque classe on a le tableau qui donne la mesure du secteur angulaire représentant chaque classe :

Moyennes	$[0; 7[$	$[7; 10[$	$[10; 14[$	$[14; 20[$
Mesure secteur angulaire en degré	10	30	40	20

Pour déterminer la mesure de cette angle il suffit de multiplier chaque éffectif par $\dfrac{360}{60}$



2. Pour calculer la moyenne il faut déterminer le centre de chaque classe

Moyennes	$[0; 7[$	$[7; 10[$	$[10; 14[$	$[14; 20[$
Centre de la classe	3,5	8,5	12	17
effectifs	6	18	24	12

Le calcul de la moyenne se fera en considérant le centre des classes comme des modalités. On a ainsi :

$$\bar{x} = \frac{3,5 \times 6 + 8,5 \times 18 + 12 \times 24 + 17 \times 12}{60} = \frac{666}{60} = 11,1$$

3. La classe ayant le plus d'effectif est $[10; 14[$elle est donc appelée classe modale. Déterminons les effectifs cumulées croissants

Moyennes	$[0; 7[$	$[7; 10[$	$[10; 14[$	$[14; 20[$
Centre de la classe	6	18	24	12
effectifs cumulés croissants	6	24	48	60

L'effectif total étant de 60 . Alors la motié de l'effectif sera 30. la plus petite classe ayant un effectif supérieure ou égale à 30 est $[10; 14[$ alors la médiane de cette serie est comprise entre 10 et 14. On peut prendre le milieu à savoir 12.

(1) Le polygone des effectifs cumulés croissants est :

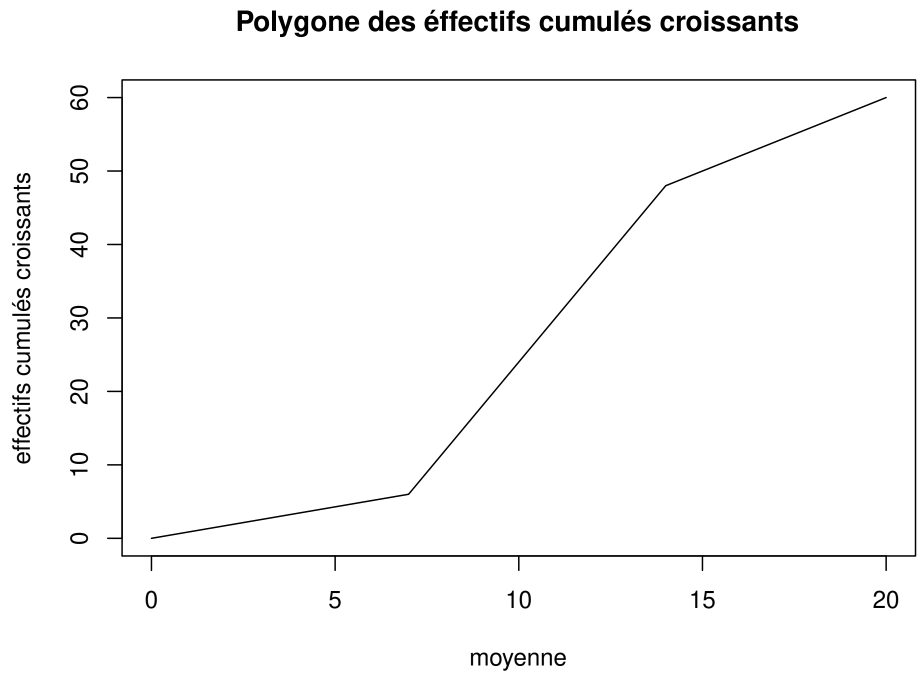


Figure 0.0.1

Exercice 3. (5pts)
Le nombre C_n^p est le nombre de cas possibles si l'on tire simultanément sans ce soucier de l'ordre p boules parmi n boules.

Les boules sont indiscernables au touché, alors la probabilité d'un évènement A dans un univers Ω sera

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues permettant la réalisation de A}}{\text{Nombre total d'issues possibles}}$$

Dans tout l'exercice comme on tire simultanément 3 boules parmi 15 boules, le nombres d'issues possibles est C_{15}^3

1.

Ainsi L'evenènement A consistera a tirer simulatanément 3 boules parmi les 7 boules (il y a 7 boules qui ne sont pas marquées 10). Le nombre de cas possibles sera C_7^3 alors on a

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_7^3}{C_{15}^3} \\ &= \frac{\frac{7!}{4! \times 3!}}{\frac{15!}{3! \times 12!}} \\ &= \frac{7! \times 12!}{4! \times 15!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4! \times 12!}{4! \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{15 \times 14 \times 13} \\ P(A) &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

2. Pour le calcul de B il est plus aisé de prendre déterminer l'évènement contraire de B noté $\bar{B}$ qui signifie aucune boule marquée 15. On a donc :

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= \frac{C_{11}^3}{C_{15}^3} \\ &= \frac{\frac{11!}{3! \times 8!}}{\frac{15!}{12! \times 3!}} \\ &= \frac{11 \times 10 \times 9}{15 \times 14 \times 13} \\ P(\bar{B}) &= \frac{33}{91} \end{aligned}$$

Comme $P(B) = 1 - P(\bar{B})$ on a alors :

$$P(B) = 1 - \frac{33}{91} = \frac{58}{91}$$

3. Pour déterminer l'évènenement C il faut choisir pour chaque type une boule on a donc

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_8^1}{C_{15}^3} \\ &= \frac{3 \times 4 \times 8}{\frac{15 \times 14 \times 13}{3!}} \\ &= \frac{3 \times 4 \times 8 \times 6}{15 \times 14 \times 13} \\ P(C) &= \frac{96}{455} \end{aligned}$$

4. Pour obtenir un total de 50 il faut 2 boules marquées 15 et une marquée 20 ou alors deux boules marquées 20 et une marquée 10 Dans ce cas la probabilité d'obtenir 2 boules marquées 15 et une marquée 20 est

$$\frac{C_4^2 \times C_3^1}{C_{15}^3}$$

Celle d'obtenir deux boules marquées 20 et une marquée 10 est

$$\frac{C_3^2 \times C_{10}^1}{C_{15}^3}$$

alors

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{C_4^2 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_{10}^1}{C_{15}^3} \\ &= \frac{6 \times 3 + 3 \times 10}{\frac{15 \times 14 \times 13}{3!}} \\ P(D) &= \frac{48}{455} \end{aligned}$$

Exercice 4. (5pts)

1. (a) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \text{ par addition on a} & \lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \text{ alors par quotient} & \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \Rightarrow \text{Par addition } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(b) On a

$$\begin{aligned} x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) &= x - x \times \frac{2}{x} + x \times \frac{1}{xe^x} \\ &= x - 2 + \frac{1}{e^x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(c) Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{x} = 0$ par addition on a $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ (croissance comparée), par quotient on a

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \frac{2}{x}) & = & 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^x} & = & -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Par addition } \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x & = & -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Par produit } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

2.

(a) Calculons la dérivée de $f(x) = x - 2 + \frac{1}{e^x}$

$$f'(x) = (x-2)' + \left(\frac{1}{e^x}\right)'$$

'On a

$$\begin{aligned} (x-2)' &= (x)' + (2)' \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{e^x}\right)' &= \frac{-e^x}{e^{2x}} \text{ la dérivée de } \frac{1}{u} \text{ est } \frac{-u'}{u} \text{et la dérivée de } e^x \text{ est } e^x \\ &= \frac{-1}{e^x} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)' + \left(\frac{1}{e^x}\right)' \\ &= 1 - \frac{1}{e^x} \\ f(x) &= \frac{e^x - 1}{e^x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}}$$

Etudions les variations de f
Etudions d'abord le signe de f'

$$\begin{array}{rccc} & f'(x) & \geq & 0 \\ \Rightarrow & \frac{e^x - 1}{e^x} & \geq & 0 \\ \Rightarrow & e^x - 1 & \geq & 0 \\ \Rightarrow & e^x & \geq & 1 \\ \Rightarrow & x & \geq & 0 \end{array}$$

Alors $f'(x)$ est positive sur $[0; +\infty[$et négative sur $]-\infty; 0]$ donc la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$et décroissante sur $]-\infty; 0]$

(b)

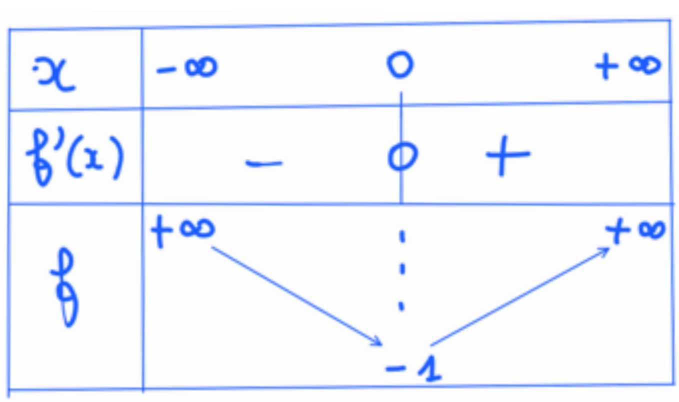


Figure 0.0.2

3. (a) On a $f(x)-(x-2)=\frac{1}{e^x}$ alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

(b) Une droite (D) d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe d'une fonction d'expression $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ comme $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=0$ alors la droite (D)d'équation $y=x-2$ est une asymptote à la courbe de f quand x tend vers $+\infty$

(c) Comme $f(x)-(x-2)=\frac{1}{e^x}>0$ alors la courbe (C)de f est au dessus de la droite (D)

(d) Tracer de la courbe

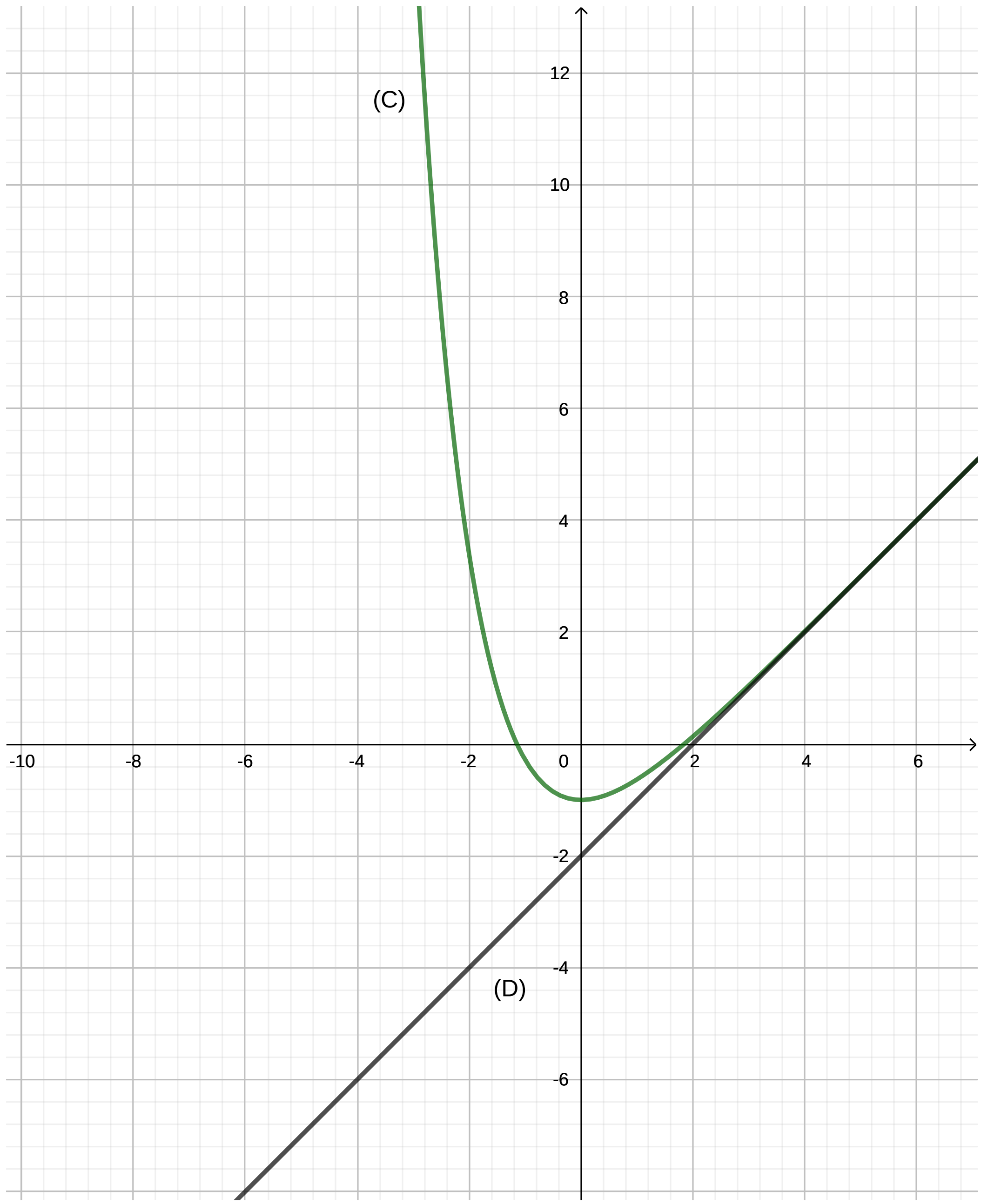


Figure 0.0.3